Nichtkooperative Spieltheorie

Dr. Andreas Tutić

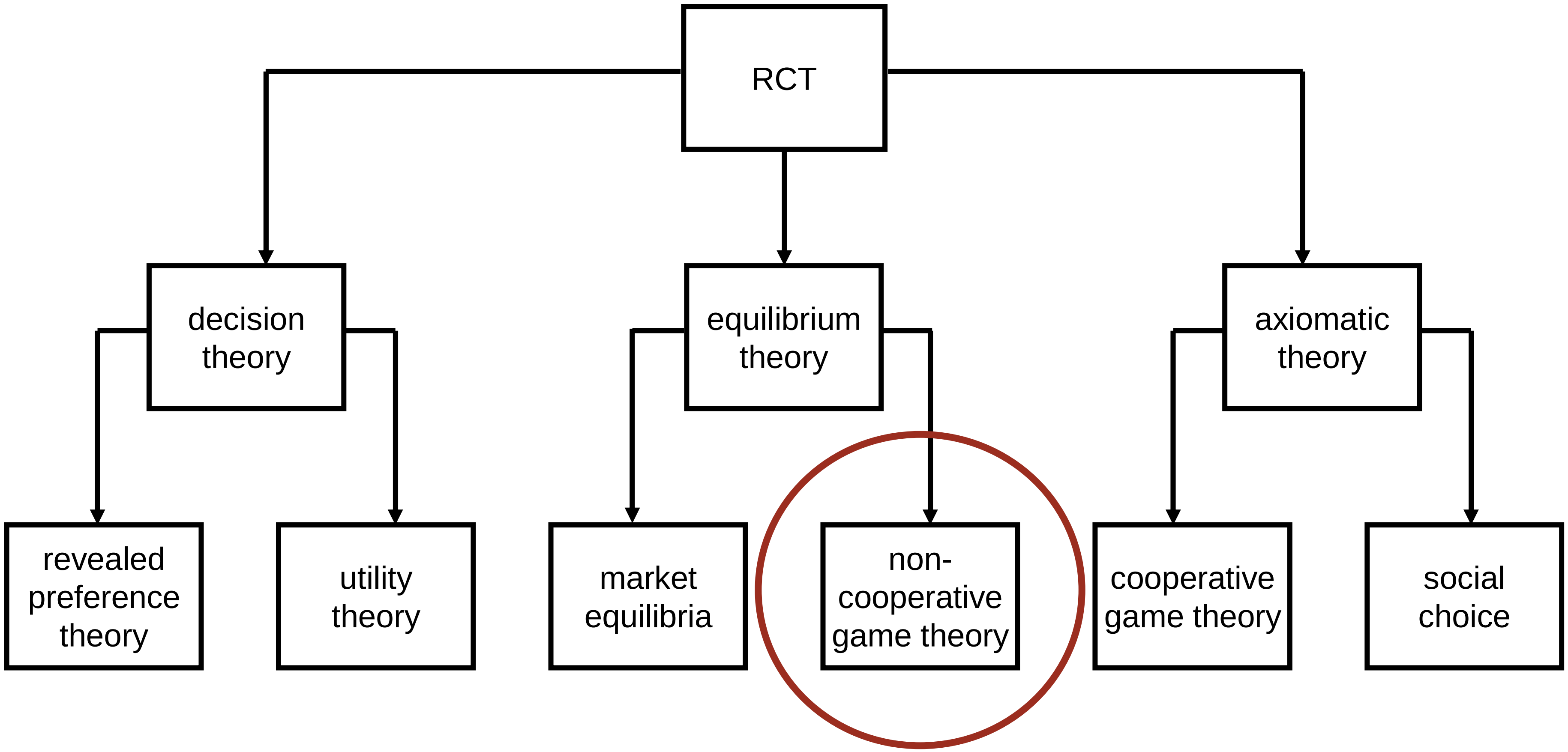
Theorien sozialen Handelns

Universität Bern

HS 2016

3 August 2015

Struktur der RCT



Spieltheorie

- Spiele in strategischer Form
- Nash-Gleichgewichte
- Dominanz
- Gemischte Strategien
- Gemischte Gleichgewichte

Spiele in strategischer Form

Definition 1 *Ein Spiel in strategischer Form ist ein Tripel* $\left(N, (S_n)_{n \in N}, (\succsim_n)_{n \in N}\right)$, *wobei*

- N *eine nichtleere Menge, die Spielermenge,*
- S_n *eine nichtleere Menge, die Strategiemenge von Spieler* $n \in N$, *und*
- $\succsim_n$ *eine Präferenzrelation auf* $S := \times_{n \in N} S_n$, *die Präferenzrelation von Spieler* $n \in N$ *auf der Menge der Strategieprofile* S.

Spiele in strategischer Form

Beispiel 2 *Chicken game, CG: Seien* $N = \{1, 2\}, S_1 = S_2 = \{c, d\}$ *und* u_1 *sowie.* u_2 *durch die folgende Matrix beschrieben*

$$\begin{array}{c||cc} & c & d \\ \hline\hline c & 3,3 & 1,4 \\ d & 4,1 & 0,0 \end{array},$$

wobei die Zeilen die Strategien von Spieler 1 sind, die Spalten die Strategien von Spieler 2 sowie die linke Zahl in jeder Zelle der Nutzenwert von Spieler 1 und die rechte Zahl in jeder Zelle der Nutzenwert von Spieler 2.

Spiele in strategischer Form

Beispiel 3 *Hotelling game, HG (vgl. Hotelling 1929): Seien* $N = \{1,2\}, S_1 = S_2 = [0,1]$ *und*

$$\begin{aligned} u_1(s_1,s_2) &= \begin{cases} 1 - \frac{s_1+s_2}{2}, & s_1 \geq s_2, \\ \frac{s_1+s_2}{2}, & s_1 < s_2, \end{cases} \quad \textit{und} \\ u_2(s_1,s_2) &= 1 - u_1(s_1,s_2). \end{aligned}$$

Nash Gleichgewichte

Definition 4 *Seien* $(N, S, \succsim)$ *ein Spiel in strategischer Form,* $n \in N$ *und* $s_{-n} \in S_{-n} := \times_{m \in N \setminus \{n\}} S_m$. $s_n \in S_n$ *heißt beste Antwort auf* s_{-n}*, wenn* $(s_n, s_{-n}) \succsim_n (s'_n, s_{-n})$ *für alle* $s'_n \in S_n$.

Definition 5 *Ein Strategieprofil* $s \in S$ *in einem Spiel in strategischer Form heißt Nash-Gleichgewicht, wenn für alle* $n \in N$ *gilt, dass* s_n *eine beste Antwort auf* s_{-n} *ist.*

Dominanz

Definition 6 *Sei* $(N, S, \succsim)$ *ein Spiel in strategischer Form und* $n \in N$*. Die Strategie* $s_n \in S_n$ *dominiert* $s'_n \in S_n$

- *schwach, wenn für alle* $s_{-n} \in S_{-n}$ *gilt* $(s_n, s_{-n}) \succsim_n (s'_n, s_{-n})$ *und ein* $s'_{-n} \in S_{-n}$ *existiert, so dass* $\left(s_n, s'_{-n}\right) \succ_n \left(s'_n, s'_{-n}\right)$.
- *stark, wenn für alle* $s_{-n} \in S_{-n}$ *gilt* $(s_n, s_{-n}) \succ_n (s'_n, s_{-n})$.

Dominiert s_n *alle Strategien* $s''_n \in S_n$, $s_n \neq s''_n$ *schwach (stark) heißt* s_n *schwach (stark) dominant. Existiert eine Strategie* $s''_n \in S_n$*, die* s_n *schwach (stark) dominiert, sagen wir dass* s_n *schwach (stark) dominiert wird.*

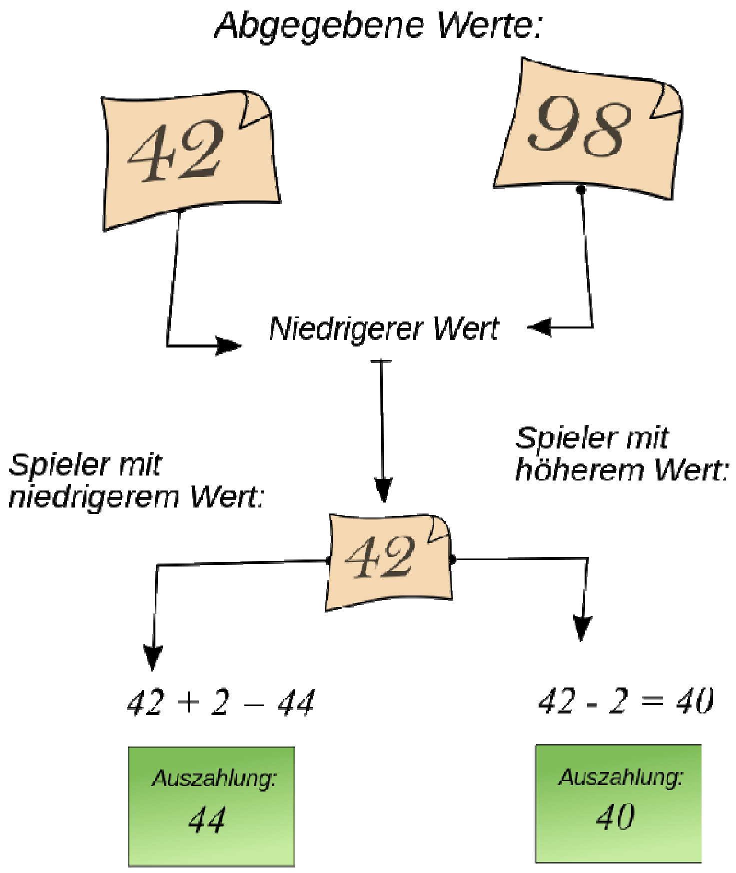
Dominanz

Definition 7 *Sei* $\Gamma = (N, S, \succsim)$ *ein endliches Spiel strategischer Form. Wir definieren induktiv eine Folge von Spielen* $(\Gamma^1, \Gamma^2, \dots)$ *wie folgt:* $\Gamma^1 := \Gamma$ *mit* $S_n = S_n^1$ *sowie* $\succsim_n = \succsim_n^1$ *für alle* $n \in N$ *und* $\Gamma^k = \left(N, \left(S_n^k\right)_{n\in N}, \left(\succsim_n^k\right)_{n\in N}\right)$ *mit* $k \geq 2$, *wobei für alle* $n \in N$

- S_n^k *alle* $s_n \in S_n^{k-1}$ *enthält, die in* Γ^{k-1} *nicht schwach (stark) dominiert werden, und*
- $\succsim_n^k$ *die Einschränkung von* $\succsim_n^{k-1}$ *auf* $S^k := \times_{n\in N} S_n^k$ *ist.*

Aufgrund der Endlichkeit von Γ *existiert ein* $k = 1, 2, \dots,$ *so dass* $\Gamma^k = \Gamma^{k'}$ *für alle* $k' \geq k$. *Wir nennen* S^k *dann Lösung von* Γ *unter iterierter schwacher (starker) Dominanz.*

Das Basu Spiel



Auszahlungsmatrix des Dilemmas

	2	3	4	…	98	99	100
2	2 2	4 0	4 0		4 0	4 0	4 0
3	0 4	3 3	5 1	…	5 1	5 1	5 1
4	0 4	1 5	4 4		6 2	6 2	6 2
…		…				…	
98	0 4	1 5	2 6		98 98	100 96	100 96
99	0 4	1 5	2 6	…	96 100	99 99	101 97
100	0 4	1 5	2 6		96 100	97 101	100 100

(Graphen: Wikipedia)

(*Basu 1994*)

Iterierte Dominanz

Gründe für das „Streichen" von Strategien:

- 1. Runde: Ego ist rational
- 2. Runde: Ego weiß, dass alter rational ist
- 3. Runde: Ego weiß, dass alter weiß, dass ego rational ist
- 4. Runde: Ego weiß, dass alter weiß, dass ego weiß, dass alter rational ist
- …

→ *Common knowledge of rationality!*

Gemischte Gleichgewichte

Definition 8 *Sei* (N, S, u) *ein endliches Spiel in strategischer Form, d.h. ein Spiel in strategischer Form, in dem es endlich viele Spieler gibt und jeder Spieler nur endlich viele Strategien hat. Dann ist* $\left(N, (\Delta(S_n))_{n \in N}, (Eu_n)_{n \in N}\right)$ *die gemischte Erweiterung von* (N, S, u)*, wobei*

- $\Delta(S) := \times_{n \in N} \Delta(S_n)$, die Menge der gemischten Strategieprofile, wobei $\Delta(S_n) := \left\{\delta_n : S_n \to [0,1] \text{ s.d. } \sum_{s \in S_n} \delta_n(s) = 1\right\}$, die Menge der gemischten Strategien von Spieler $n \in N$,
- $Eu_n : \Delta(S) \to \mathbb{R}$ mit $Eu_n(\delta) := \sum_{s \in S} \left(\prod_{n \in N} \delta_n(s_n) \right) u_n(s)$ für alle $\delta \in \Delta(S)$.

Gemischte Gleichgewichte

Definition 9 *Ein gemischtes Strategieprofil $\delta \in \Delta(S)$ heißt gemischtes Nash-Gleichgewicht in einem Spiel in strategischer Form (N, S, u), wenn δ ein Nash-Gleichgewicht in $(N, \Delta(S), Eu)$ ist.*

Satz 10 *Sei (N, S, u) ein endliches Spiel in strategischer Form. Für jedes $n \in N$ und $s \in S_n$ sei $\mathbf{s} \in \Delta(S_n)$ definiert durch $\mathbf{s}(s) = 1$ und $\mathbf{s}(t) = 0$ für alle $t \in S_n \setminus \{s\}$. Dann gilt für jedes $\delta \in \Delta(S)$ und jedes $n \in N$:*

$$Eu_n(\delta_n, \delta_{-n}) = \sum_{s_n \in S_n} \delta_n(s_n)\, Eu_n(\mathbf{s}_n, \delta_{-n}).$$

Gemischte Gleichgewichte

Satz 11 *Sei* (N, S, u) *ein endliches Spiel in strategischer Form.* $\delta \in \Delta(S)$ *ist genau dann ein gemischtes Nash-Gleichgewicht in* (N, S, u)*, wenn für alle* $n \in N$ *und* $s \in S_n$ *gilt:* $\delta_n(s) > 0 \implies Eu_n(\mathbf{s}, \delta_{-n}) \geq Eu_n(\mathbf{t}, \delta_{-n})$ *für alle* $t \in S_n$.

Satz 12 (Nash 1950) *Jedes endliche Spiel besitzt ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien.*

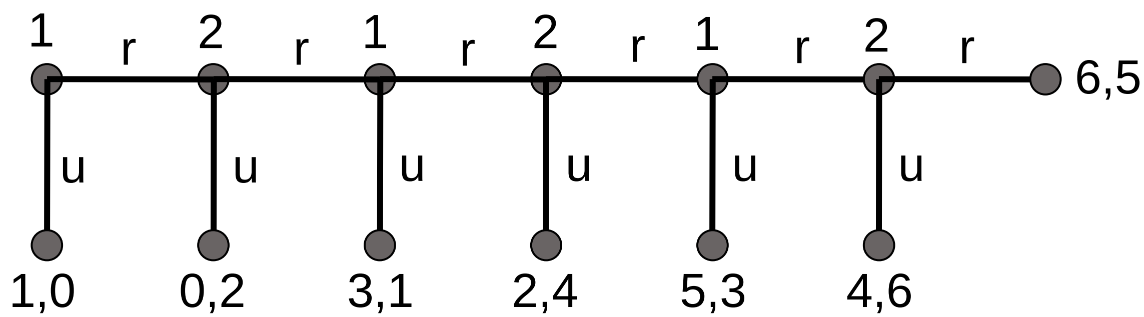
Gemischte Gleichgewichte

	c	d
c	$3, 3$	$1, 4$
d	$4, 1$	$0, 0$

$$Eu_1(c, \delta_2) = \beta \cdot 3 + (1 - \beta) \cdot 1 = \beta \cdot 4 + (1 - \beta) \cdot 0 = Eu_1(d, \delta_2)$$

$$\Rightarrow \quad \beta = \frac{1}{2}$$

Extensive Form



- Reichhaltigere Struktur
- Modellierung von asymmetrischer und unvollständiger Information
- Zentrale Idee der Lösungskonzepte: Sequentielle Rationalität (Teilspielperfektheit)

Doppelte Kontingenz

„From these premises derives the fundamental proposition of the double contingency of interaction. Not only, as for isolated behaving units, animal or human, is a goal outcome contingent on successful cognition and manipulation of environmental objects by the actors, but since the most important objects involved in interaction act too, it is also contingent on their action or intervention in the course of events.“ (*Parsons et al. 1951: 16*)

Andreas Tutić

Doppelte Kontingenz[1]

Zusammenfassung: Es wird die Frage diskutiert, inwiefern spieltheoretische Betrachtungen zum Problem der doppelten Kontingenz über die soziologische Idee, Akteure lösen diese Probleme vermöge gemeinsamer kultureller Orientierungen, hinausgehen. Zu diesem Zweck wird die epistemische Spieltheorie herangezogen, die die Vorbedingungen spieltheoretischer Lösungskonzepte untersucht. Es zeigt sich, dass die Bedingungen dafür, dass die Handlungen der Akteure in einer sozialen Situation ein Gleichgewicht konstituieren, sehr streng sind. Insbesondere muss dafür ein hohes Maß an sozial geteiltem Wissen vorausgesetzt werden, eine Bedingung, die der von Parsons beschriebenen Lösung des Problems der doppelten Kontingenz sehr nahe kommt. Diese Beobachtung wirft auch ein neues Licht auf die individualistische Lösung des Problems sozialer Ordnung.

Schlagwörter: Spieltheorie, interaktives Wissen, Erwartungen, soziale Ordnung.

Double Contingency

Abstract: This article discusses the question, if and to what extent game-theoretical analysis of the problem of double contingency improves upon the sociological idea that agents solve these problems via shared cultural orientations. To this end this article invokes epistemic game theory, which studies implicit assumptions of game-theoretical solution concepts. It is demonstrated that actions constitute an equilibrium in social situations only if very strict conditions are met. In particular, a high degree of interactive knowledge has to obtain, a condition which is very similar to Parsons' solution of the problem of double contingency. This observation also puts the individualistic solution of the problem of social order into perspective.

Keywords: game theory, interactive knowledge, expectations, social order.

1 Einleitung

Der Begriff der doppelten Kontingenz spielt sowohl in der strukturfunktionalistischen Theorie Parsons‹ als auch in der Systemtheorie Luhmanns eine zentrale Rolle. Das Konzept verweist auf ein generelles Moment der Unbestimmtheit in Interaktionen, welches daher rührt, dass die involvierten Akteure ihr Handeln am Handeln der jeweils anderen involvierten Akteure orientieren. Richard Münch (1986: 46) beschreibt das Phänomen mit den Worten:

> »It only means that ego‹s action is contingent on his or her decisions and these are contingent on alter‹s expectations and possible reactions, and on his or her expecta-

1 Für Literaturhinweise und kritische Anmerkungen bedanke ich mich bei Hartmut Esser, Thomas Voss, Clemens Kroneberg und zwei anonymen Gutachtern.

Doppelte Kontingenz

- *Parsons* (und mit Abstrichen auch *Luhmann*): Das Problem der doppelten Kontingenz wird vermöge geteilter kultureller Überzeugungen gelöst
- Standardinterpretation der Spieltheorie: Das Problem lässt sich allein auf Grundlage von individueller Rationaltität lösen
- Epistemische Spieltheorie: Gleichgewichte = individuelle Rationalität + X
- X = kulturelle Überzeugungen in Form von common priors, korrelierter beliefs, common knowledge of rationality, etc.

Zusammenfassung

- Spiele in strategischer Form sind das basale Instrument der RCT zur Modellierung sozialer Situationen
- Lösungskonzepte der Spieltheorie separieren stabile von instabilen Handlungskonfigurationen
- Spieltheorie beruht auf Entscheidungstheorie und
- setzt ferner starke Annahmen bezüglich geteilter kultureller Überzeugungen voraus