

Theoriekonstruktion und Hypothesenableitung

WS 2019/19

Serie 4

PD Dr. Andreas Tutić

Hinweise. Um die Klausur zu bestehen, sollte man so gut wie alle einfachen Aufgaben lösen können und auch einige moderate Aufgaben. Es sei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen und $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Für eine nichtleere, endliche Menge X ist $\mathcal{L}$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf X , also $\mathcal{L} := \{l : X \rightarrow [0, 1], \text{ mit } \sum_{x \in X} l(x) = 1\}$. Für $n \in \mathbb{N}$, $l_1, \dots, l_n \in \mathcal{L}$ und Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, 1]$, für die gilt $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$, definieren wir die Abbildung $\bigoplus_{i=1}^n \alpha_i l_i : X \rightarrow [0, 1]$ durch

$$\bigoplus_{i=1}^n \alpha_i l_i(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i l_i(x).$$

1. (moderat) Sei X eine endliche, nichtleere Menge und $\mathcal{L}$ die Menge der Lotterien auf X . Zudem sei $\succsim$ eine Präferenzrelation auf $\mathcal{L}$.
 - (a) Nenne die Definition der Eigenschaft der Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen für eine Präferenzrelation auf $\mathcal{L}$! $\succsim$ erfüllt genau dann die Eigenschaft der Unabhängigkeit, wenn für alle $p, q, r \in \mathcal{L}$ und jedes $\alpha \in (0, 1]$ gilt
 - (b) Beschreibe die Eigenschaft der Unabhängigkeit in eigenen Worten!
 - (c) Ist folgende Aussage wahr oder falsch? Das Von-Neumann-Morgenstern-Theorem gibt notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, dass es zu $\succsim$ eine Nutzenfunktion gibt, die die Erwartungsnutzeneigenschaft hat.
 - (d) Sei $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Von-Neumann-Morgenstern-Nutzenfunktion für $\succsim$ auf $\mathcal{L}$. Die Funktionen $v : X \rightarrow \mathbb{R}$ und $w : X \rightarrow \mathbb{R}$ sind definiert über $v(x) = -u(x) + 10$ und $w(x) = 2u(x) - 1$. Welche der beiden Funktionen sind ebenfalls Von-Neumann-Morgenstern-Nutzenfunktionen für $\succsim$ auf $\mathcal{L}$?
2. (einfach) John hat die Wahl zwischen zwei Optionen. Option A ist riskant: Mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% erhält er die monetäre Auszahlung 2, mit der Gegenwahrscheinlichkeit erhält er die monetäre Auszahlung 8. Option B bringt John mit Sicherheit die monetäre Auszahlung 4.
 - (a) Bestimme den Erwartungswert von Option A!
 - (b) Wahr oder falsch? Wenn John risikofreudig oder risikoneutral ist, wird er Option A wählen.
 - (c) Gehen wir im Folgenden davon aus, dass Johns von Neumann & Morgenstern Nutzenfunktion für monetäre Auszahlungen $u(x) = x^2$ lautet. Bestimme den Erwartungsnutzen der beiden Optionen. Wie wird sich John entscheiden?
 - (d) Das Sicherheitsäquivalent einer riskanten Option ist als diejenige monetäre Auszahlung definiert, die den Akteur indifferent zwischen der riskanten Option und der sicheren Auszahlung des Sicherheitsäquivalentes macht. Bestimme das Sicherheitsäquivalent für Option A!
3. (moderat) Maurice wird zwei Entscheidungssituationen, A und B, ausgesetzt, in denen er jeweils zwischen zwei Optionen wählen muss:
A1: Mit 33% Wahrscheinlichkeit 27.500, mit 66% 24.000 und mit 1% 0.
A2: 24.000 als sichere Auszahlung.
B1: Mit 33% Wahrscheinlichkeit 27.500 und mit 67% die Auszahlung 0.
B2: 24.000 mit einer Wahrscheinlichkeit von 34% und mit 66% 0.
Maurice entscheidet sich in Situation A für die Option A2 und in Situation B für die Option B1. Zeige, dass Maurice' Entscheidungsverhalten nicht mit der von Neumann & Morgenstern Theorie vereinbar ist! Drücke hierfür beide Entscheidungen durch jeweils eine Ungleichung aus und zeige, dass diese nicht simultan erfüllt sein können! (*Hinweis:* Setze $u(27.500) = 1$ und $u(0) = 0$.)

4. (einfach) Gegeben sei die Menge $X = \{a, b, c\}$. Bestimmt $\bigoplus_{i=1}^n \alpha_i l_i$ für die folgenden Fälle. Verwendet hierfür einerseits die Definition von $\bigoplus_{i=1}^n \alpha_i l_i$ (rechnerisch) und löst die Aufgabe andererseits mit jeweils einem Wahrscheinlichkeitsbaum für die Lotterien (grafisch)!
- (a) $n = 2$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, $l_1 = (1, 0, 0)$ und $l_2 = (0, 0, 1)$.
 - (b) $n = 3$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = \frac{1}{4}$, $\alpha_3 = \frac{1}{4}$, $l_1 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $l_2 = (0, 0, 1)$ und $l_3 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$.
 - (c) $n = 3$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = \frac{1}{4}$, $\alpha_3 = \frac{1}{4}$, $l_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, $l_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ und $l_3 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$.
5. (einfach) Sei $X = \{1, 2, \dots, 10\}$ und $u : X \rightarrow \mathbb{R}$, mit $u(x) = x^2$, eine vNM-Nutzenfunktion auf X . Bestimme den Erwartungswert und den Erwartungsnutzen der Lotterien $l_1, l_2 \in L$, wobei $l_1(x) = \frac{1}{10}$ für alle $x \in X$ und $l_2(x) = \frac{1}{5}$ für alle $x \in X$, mit $x \leq 5$, und $l_2(x) = 0$ für alle $x \in X$, mit $x > 5$!